BACCALAURÉAT GÉNÉRAL — SESSION 2027

Épreuve de l'enseignement de spécialité

MATHÉMATIQUES

ANNALES MATINÉES DU BAC — SUJET D'ENTRAÎNEMENT · MDB-ANNALE-MATH-01

Durée de l'épreuve	4 heures
Coefficient	16
Calculatrice	L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé. L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.
Notation	**20 points** : exercice 1 sur 5 · exercice 2 sur 4 · exercice 3 sur 5 · exercice 4 sur 4 · maîtrise de la langue sur 2

Le candidat traite **les quatre exercices**. Ils sont indépendants les uns des autres et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. **Toute réponse doit être justifiée.** Le candidat est invité à faire figurer sur sa copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Maîtrise de la langue (2 points). L'orthographe, la syntaxe, la capacité à formuler un raisonnement et l'emploi d'un vocabulaire mathématique juste et adapté sont évalués sur l'ensemble de la copie.

> Sujet inédit conçu par Les Matinées du Bac pour l'entraînement. Il n'a pas de valeur officielle. Les situations et les données numériques sont construites pour l'exercice.

EXERCICE 1 — 5 points

Thème : loi binomiale, variables aléatoires, inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Un food-truck propose trois formules : la formule **Complète** à 12 €, la formule **Express** à 9 € et la formule **Boisson** à 3 €. Chaque client achète exactement une formule.

Une étude menée sur plusieurs mois permet de modéliser ainsi le comportement des clients : un client choisit la formule Complète avec la probabilité 0,5, la formule Express avec la probabilité 0,3 et la

formule Boisson avec la probabilité 0,2. Les choix des différents clients sont indépendants les uns des autres.

Partie A — Les clients « Boisson »

1. On s'intéresse aux dix premiers clients d'une journée. On note N le nombre de ceux qui choisissent la formule Boisson.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire N.

b) Calculer la probabilité qu'exactement deux de ces dix clients choisissent la formule Boisson. On donnera une valeur approchée au millième.

c) Calculer la probabilité qu'au moins un de ces dix clients choisisse la formule Boisson. On donnera une valeur approchée au millième.

2. Le gérant souhaite que la probabilité qu'au moins un client choisisse la formule Boisson parmi les n premiers clients de la journée soit supérieure à 0,999. Déterminer le plus petit entier n qui convient.

Partie B — La recette d'une journée

On note X la variable aléatoire égale au montant, en euros, dépensé par un client pris au hasard.

3. Donner la loi de probabilité de X, puis calculer son espérance E(X) et sa variance V(X). Interpréter E(X) dans le contexte de l'exercice.

4. Un jour donné, le food-truck sert 100 clients. Pour tout entier i compris entre 1 et 100, on note X_i le montant dépensé par le i-ème client ; les variables X_1, …, X_{100} sont indépendantes et suivent toutes la loi de X. On note $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$ la recette de la journée.

a) Calculer l'espérance et la variance de S.

b) Le gérant affirme : « Sur une journée de 100 clients, la recette a plus de 88 % de chances d'être strictement comprise entre 830 € et 1 030 €. » Cette affirmation est-elle justifiée ?

Partie C — Simulation

Pour un entier naturel n non nul, on note M_n la variable aléatoire égale au montant moyen dépensé par les n premiers clients. On souhaite simuler M_n avec le programme Python ci-dessous, dans lequel l'instruction `random()` renvoie un nombre réel aléatoire de l'intervalle [0 ; 1[.

```
1   from random import random
2
3   def client():
4       r = random()
5       if r < 0.5:
6           return 12
7       elif ...:
8           return 9
9       else:
10          return 3
11
12  def moyenne(n):
13      s = 0
14      for i in range(n):
15          s = s + client()
16      return ...
```

5. Recopier et compléter les lignes 7 et 16.

6. On exécute plusieurs fois l'instruction `moyenne(1000)`. Autour de quelle valeur peut-on s'attendre à obtenir les résultats ? Justifier.

7. Déterminer le plus petit entier n pour lequel l'inégalité de concentration permet d'affirmer que la probabilité que M_n s'écarte de E(X) d'au moins 0,50 € est inférieure ou égale à 0,05.

EXERCICE 2 — 4 points

Thème : géométrie dans l'espace

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que AB = 4, AD = 2 et AE = 3. Les faces ABCD et EFGH sont parallèles, et les arêtes [AE], [BF], [CG] et [DH] sont perpendiculaires à la face ABCD.

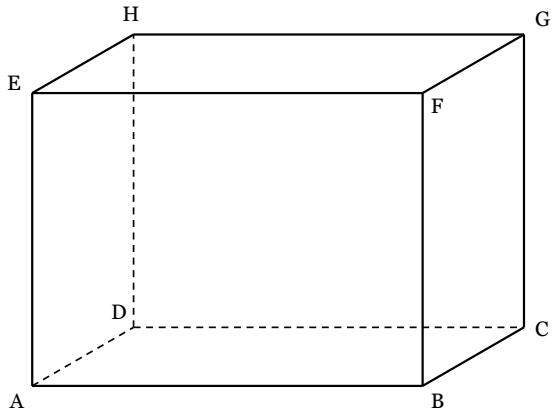


Figure 1 — Le pavé droit ABCDEFGH (la figure n'est pas à l'échelle)

L'espace est muni du repère orthonormé (A ; **i**, **j**, **k**) où **i** = ¼ **AB**, **j** = ½ **AD** et **k** = ⅓ **AE**.

1. Donner les coordonnées des points B, D, E et G dans ce repère.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (BDE).

3. On note Δ la droite passant par A et orthogonale au plan (BDE).

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

b) Déterminer les coordonnées du point K, intersection de la droite Δ et du plan (BDE).

c) En déduire la distance du point A au plan (BDE).

4. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Calculer le volume du tétraèdre ABDE, puis en déduire l'aire du triangle BDE.

5. On rappelle que le centre de gravité d'un triangle est situé, sur chacune de ses médianes, aux deux tiers de celle-ci en partant du sommet.

Démontrer que la droite (AG) coupe le plan (BDE) au centre de gravité du triangle BDE.

EXERCICE 3 — 5 points

Thème : fonction logarithme népérien, convexité, calcul intégral

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$\mathbf{f(x) = (1 + \ln x) / x}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan, tracée ci-dessous.

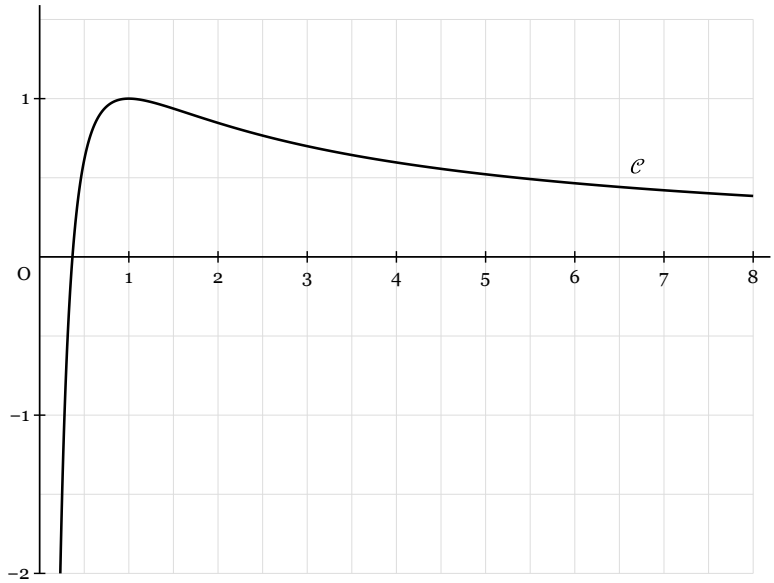


Figure 2 — La courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.

2. Étudier les variations de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet exactement deux solutions sur $]0 ; +\infty[$, notées α et β avec $\alpha < \beta$. Donner une valeur approchée au centième de chacune d'elles.

4. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$. Déterminer les coordonnées exactes du point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.

5. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine du plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1/e$ et $x = e$.

6. Existe-t-il une ou plusieurs tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ passant par l'origine O du repère ? Si oui, en donner une équation.

EXERCICE 4 — 4 points

Thème : suites, intégration par parties, algorithmique

Pour tout entier naturel n, on pose

$$\mathbf{I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx}$$

1. Calculer I_0.

2. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante et que tous ses termes sont positifs. Que peut-on en déduire ?

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $I_n \leq 1/(n + 1)$. En déduire la limite de la suite (I_n).

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$\mathbf{I_{n+1} = (n + 1)\, I_n - e^{-1}}$$

En déduire les valeurs exactes de I_1 et I_2.

5. On considère la fonction Python suivante.

```
1   from math import exp
2
3   def integrale(n):
4       I = 1 - exp(-1)
5       for k in range(n):
6           I = (k + 1) * I - exp(-1)
7       return I
```

a) Expliquer ce que renvoie, en théorie, l'appel `integrale(n)`.

b) Sur un ordinateur, l'appel `integrale(20)` affiche environ −82,18. Expliquer pourquoi cette valeur ne peut pas être égale à I_{20}.

6. Déterminer la limite de la suite de terme général n I_n.

FIN DU SUJET